Pismeni ispit iz Diferencijalne geometrije, 14.06.2013. (ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte, obavezno navesti formulu koju koristite i značenje simbola iz napisane formule)

1. Po glavnim normalama zavojnice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ odsječeni su odsječci dužine ℓ. Naći geometrisko mjesto Γ njihovih krajeva (drugim riječima, naći jednačinu krive koja prolazi kroz tačke koje se nalaze na kraju odsječaka).

2. Data je kriva $\vec{r} = x\vec{i} + x^n\vec{j} + z(x)\vec{k}$. Odrediti $z(x)$ tako da oskulatorna ravan krive u svakoj tački prolazi kroz projekciju te tačke na y-osu.

3. (40%)(a) Posmatrajmo jednakost

$$\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, (k^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Koju površinu ova jednakost predstavlja? Odrediti koordinatne krive $u = const.$ i $v = const.$ Dati geometrisko tumačenje parametara u i v.

(60%)(b) Naći jednačinu konusne površi čiji je vrh u tački $(0; 0; -c)$ a direktrisa joj je lemniskata $z = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

4. Odrediti asimptotske linije površi $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Pismeni ispit iz Diferencijalne geometrije, 14.06.2013. (ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte, obavezno navesti formulu koju koristite i značenje simbola iz napisane formule)

1. Po glavnim normalama zavojnice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ odsječeni su odsječci dužine ℓ. Naći geometrisko mjesto Γ njihovih krajeva (drugim riječima, naći jednačinu krive koja prolazi kroz tačke koje se nalaze na kraju odsječaka).

2. Data je kriva $\vec{r} = x\vec{i} + x^n\vec{j} + z(x)\vec{k}$. Odrediti $z(x)$ tako da oskulatorna ravan krive u svakoj tački prolazi kroz projekciju te tačke na y-osu.

3. (40%)(a) Posmatrajmo jednakost

$$\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, (k^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Koju površinu ova jednakost predstavlja? Odrediti koordinatne krive $u = const.$ i $v = const.$ Dati geometrisko tumačenje parametara u i v.

(60%)(b) Naći jednačinu konusne površi čiji je vrh u tački $(0; 0; -c)$ a direktrisa joj je lemniskata $z = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

4. Odrediti asimptotske linije površi $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Po glavnim normalama zavojnice $x=a\cos t$; $y=a\sin t$; $z=bt$ odsječeni su odsječci dužine l. Nađi geometrisko mjesto Γ njihovih krajeva (drugim riječima, nađi jednačinu krive koja prolazi kroz tačke koje se nalaze na kraju odsječaka).

Rj: Sa $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ obilježimo redom vektore u pravcu tangente, normale i binormale. Tada je

$$\vec{b}=\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}, \quad \vec{t}=\dot{\vec{r}}, \qquad \vec{t}=(-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}=(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$\vec{b}=(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{t}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ab\sin t & -ab\cos t & a^2\\ -a\sin t & a\cos t & b\end{vmatrix}=$$

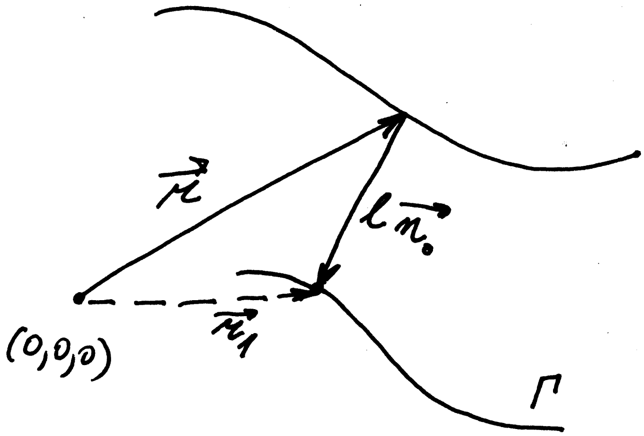
$$=(-ab^2\cos t-a^3\cos t, -(ab^2\sin t+a^3\sin t), 0)$$

$$=(-(ab^2+a^3)\cos t, -(ab^2+a^3)\sin t, 0)$$

$$|\vec{n}|^2=(ab^2+a^3)^2\cos^2 t+(ab^2+a^3)^2\sin^2 t=(ab^2+a^3)^2$$

$$|\vec{n}|=ab^2+a^3$$

Odavde zaključujemo $\vec{n}_0=(-\cos t, -\sin t, 0)$



$$l\vec{n}_0 = (-l\cos t, -l\sin t, 0)$$

Ako sa $\vec{r}_1$ obilježimo vektor položaja neke tačke (x_1, y_1, z_1) geometriskog mjesta Γ tada je

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + l\vec{n}_0$$

tj.

$$x_1 = (a-l)\cos t$$

$$y_1 = (a-l)\sin t$$

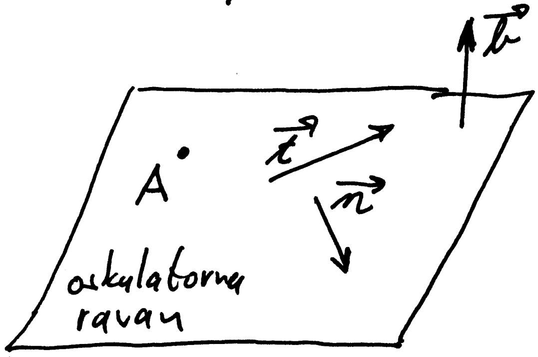
$$z_1 = bt$$

iz čega vidimo da je Γ zavojnica.

(#) Data je kriva $\vec{r} = x\vec{i} + x^n\vec{j} + z(x)\vec{k}$. Odrediti $z(x)$ tako da oskulatorna ravan krive u svakoj tački prolazi kroz projekciju te tačke na y-osu.

Rj. Data je kriva $\vec{r}$: $\begin{cases} x = t \\ y = t^n \\ z = z(t) \\ t \in R \end{cases}$

Izaberimo proizvoljnu tačku $A(t; t^n; z(t))$ na krivoj. Projekcija ove tačke na y-osu je $A'(0; t^n; 0)$. Odredimo jednačinu oskulatorne ravni kroz tačku A.



$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} = (1, nt^{n-1}, z')$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

$$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & nt^{n-1} & z' \\ 0 & n(n-1)t^{n-2} & z'' \end{vmatrix}$$

$$= \left(n z'' t^{n-1} - n(n-1) z' t^{n-2}, -z'', n(n-1)t^{n-2}\right)$$

$$\underline{A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0}$$

<u>jednačina ravni kroz tačku (x_1, y_1, z_1) čiji je vektor normale (A, B, C)</u>

U našem slučaju jednačina oskulatorne ravni

$$\begin{vmatrix} x - t & y - nt^{n-1} & z - z(t) \\ 1 & nt^{n-1} & z'(t) \\ 0 & n(n-1)t^{n-2} & z''(t) \end{vmatrix} = 0$$

Prema pretpostavci zadatka jednačina oskulatorne ravni prolazi kroz tačku A'. Kako je $A'(0; t^n; 0)$ imamo

$$\begin{vmatrix} 0-t & t^n-t^n & 0-z(t) \\ 1 & nt^{n-1} & z'(t) \\ 0 & n(n-1)t^{n-2} & z'' \end{vmatrix} = 0$$

$$-t\left(nt^{n-1}z'' - n(n-1)z't^{n-2}\right) - 0\cdot z'' - z\cdot n(n-1)t^{n-2} = 0$$

Umjesto promjenjive t, uzmimo promjenjivu x:

$$x^2 z''(-nx^n) + z'(n(n-1)x^{n-1}) - z(n(n-1)x^{n-2}) = 0$$

$$/ : (-n)x^{n-2}$$

$$x^2 z'' - (n-1)xz' + (n-1)z = 0$$

rješenje ove diferencijalne jednačine je ujedno i rješenje zadatka

Ovo je Ojlerova diferencijalna jednačina. Uvodimo smjene $x = e^t$, $y = x^r$ tj. u našem slučaju $z = x^r$ $\Rightarrow$

$z' = rx^{r-1}$, $z'' = r(r-1)x^{r-2}$ iz čega ćemo dobiti

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} - (n-1)xrx^{r-1} + (n-1)x^r = 0 \quad /: x^r$$

$$r^2 - r - nr + r + n - 1 = 0$$

$$r^2 - nr + n - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1,\ r_2 = n-1$$

Prema tome

$$z(x) = C_1 x + C_2 x^{n-1}, \quad (n \neq 2)$$

$$z(x) = C_1 x + C_2 x \ln x, \quad (n = 2).$$

(#) Posmatrajmo jednakost

$$\vec{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ (k^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

(a) Koju površinu ova jednakost predstavlja

(b) Odrediti koordinatne krive $u=const.$ i $v=const.$

(c) Dati geometrisko tumačenje parametara u i v.

Rj.

$$\vec{r}: \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = (k^2-u^2)^{\frac{1}{2}} \\ \quad u \in [-k, k] \\ \quad v \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

vrijednosti za ove parametre vidimo iz definicije površi

Kako je $x^2+y^2+z^2 = u^2+k^2-u^2 = k^2$ to imamo

$$\vec{r}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = k^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

da je $\vec{r}$ dio sfere poluprečnika k sa centrom u koordinatnom početku koja se nalazi iznad xOy-ravni.

Ako je v konstanta npr. $v=c$ tada

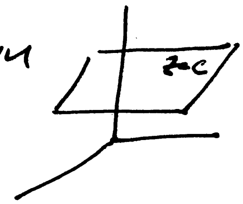
$$\vec{r}: \begin{cases} x = u\cos c \\ y = u\sin c \\ z = (k^2-u^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = tg\, c \quad \Rightarrow \quad y = x \underbrace{tg\, c}_{=const} \quad \dots(1)$$

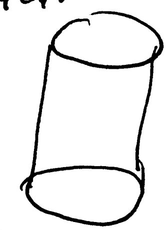
$$x^2+y^2+z^2 = u^2+k^2-u^2 = k^2 \quad \dots(2)$$

Iz (1) i (2) vidimo da je u-kriva presjek ravni (koja sadrži z-osu i u xOy-ravni prolazi kroz pravu $y = x\, tg\, c$) i sfere $x^2+y^2+z^2=k^2$. Ove krive se zovu meridijani sfere.

Kada je $u=c$ imamo

$$\vec{r}: \begin{cases} x = c\cos v \\ y = c\sin v \\ z = \sqrt{k^2 - c^2} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} & z = \text{const} \quad \text{ravan} \\ & x^2 + y^2 = c^2 \quad \text{cilindar} \end{aligned}$$

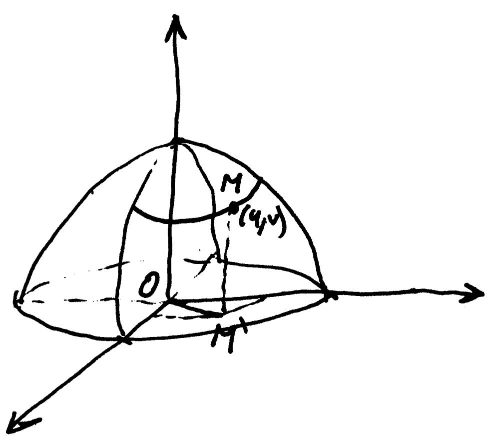




da su v-krive krive dobijene kao presjek sfere sa ravni koja je paralelna xOy ravni. Ove krive se zovu paralele sfere.

Udaljenost tačke (u,v) od z-ose je data pomoću parametra u, dok je v tačka paralele M takva da se OM' nalazi na nekom rastojanju φ (φ je ugao) u odnosu na neki fiksirani pravac u xOy-ravni.

(M' je ortogonalna projekcija tačke M).

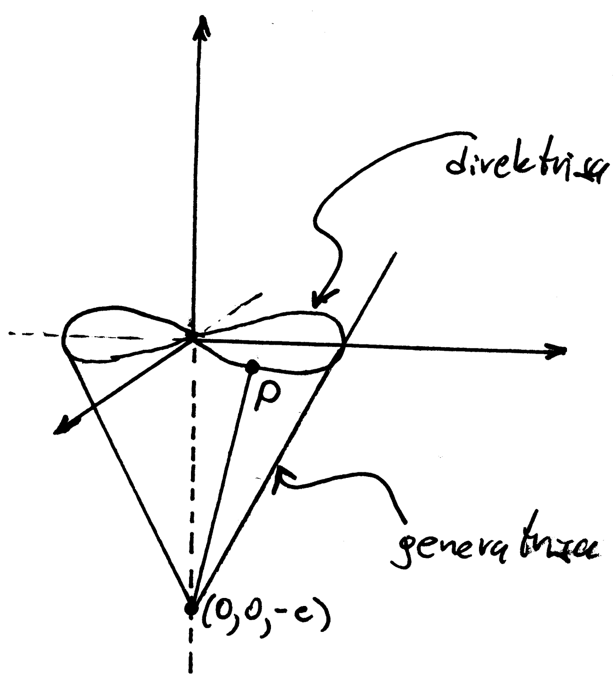


(#) Naći jednačinu konusne površi čiji je vrh u tački $(0;0;-c)$ a direktrisa joj je lemniskata

$z=0;\quad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$

Rj:

Konusna površ je površ koja nastaje kretanjem prave p tako što ona svo vrijeme prolazi kroz nepokretnu (datu) tačku S i siječe nepokretnu (datu) krivu c. Prava p naziva se izvodnica (generatrisa) konusne površi, tačka S je vrh konusne površi a kriva c je direktrisa konusne površi.



Neka je $P(p_1,p_2,p_3)$ proizvoljna tačka na direktrisi. Tada je

$$(p_1^2+p_2^2) = a^2(p_1^2-p_2^2) \quad \ldots(1)$$

i

$$p_3 = 0 \quad \ldots(2)$$

Jednačina generatrise koja spaja $(0,0,-c)$ sa P je

$$\frac{x}{p_1} = \frac{y}{p_2} = \frac{z+c}{p_3+c} \quad \left(=\frac{1}{t}\right) \text{ tj.}$$

$$p_1 = xt \quad \ldots(3)$$

$$p_2 = yt \quad \ldots(4)$$

$$p_3 = (z+c)t - c \quad \ldots(5)$$

Ako iz jednačina (1), (2), (3), (4) i (5) eliminišemo p_1, p_2, p_3 i t dobijemo traženu jednačinu konusne površi.

Iz (2) i (5) slijedi

$$t = \frac{c}{z+c}$$

te (3) i (4) postaju $\quad p_1 = \dfrac{cx}{z+c} \quad \ldots (6)$

$$p_2 = \frac{cy}{z+c} \quad \ldots (7)$$

Ako (6) i (7) uvrstimo u (1) dobićemo traženu jednačinu konusne površi

$$c^2(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)(z+c)^2$$

Odrediti asimptotske linije površi $z=\frac{1}{x^2+y^2}$.

Rj.

Prvo parametrizirajmo datu krivu

$$\left.\begin{aligned} x&=\sqrt{u}\cos v\\ y&=\sqrt{u}\sin v \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=u\cos^2 v+u\sin^2 v=u$$

$$\Downarrow$$

$$z=\frac{1}{u}$$

$$\vec{r}:\begin{cases} x=\sqrt{u}\cos v\\ y=\sqrt{u}\sin v\\ z=\frac{1}{u}\\ u\in\mathbb{R}_0^+,\ v\in[0,2\pi) \end{cases}$$

<u>Asimptotske linije površi $\vec{r}$ dobijemo kada rješenje diferencijalne jednačine $F_2=0$ uvrstimo u jednačinu površi $\vec{r}$ (F_2 je druga osnovna forma površi)</u>

$$F_2=d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0$$

$$d^2\vec{r}=\vec{r}\,''_{uu}\,du^2+2\vec{r}\,''_{uv}\,du\,dv+\vec{r}\,''_{vv}\,dv$$

$$\vec{r}\,'_u=\left(\frac{\cos v}{2\sqrt{u}},\ \frac{\sin v}{2\sqrt{u}},\ -\frac{1}{u^2}\right)$$

$$\vec{r}\,'_v=\left(-\sqrt{u}\sin v,\ \sqrt{u}\cos v,\ 0\right)$$

$$\vec{n}=\vec{r}\,'_u\times\vec{r}\,'_v=$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\cos v}{2\sqrt{u}} & \frac{\sin v}{2\sqrt{u}} & -\frac{1}{u^2}\\ -\sqrt{u}\sin v & \sqrt{u}\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{u}\cos v}{u^2},\ \frac{\sqrt{u}\sin v}{u^2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{r}\,''_{uu}=\left(-\frac{\cos v}{4\sqrt{u^3}},\ -\frac{\sin v}{4\sqrt{u^3}},\ \frac{2}{u^3}\right)\quad /du^2$$

$$\vec{r}\,''_{uv}=\left(-\frac{\sin v}{2\sqrt{u}},\ \frac{\cos v}{2\sqrt{u}},\ 0\right)\quad /du\,dv$$

$$\vec{r}\,''_{vv}=\left(-\sqrt{u}\cos v,\ -\sqrt{u}\sin v,\ 0\right)\quad /dv^2$$

Sad imamo

$$d^2\vec{r}=\Big(-\frac{\cos v}{\underbrace{4\sqrt{u^3}}_{4u\sqrt{u}}}du^2-\frac{\sin v}{2\sqrt{u}}du\,dv-\sqrt{u}\cos v\,dv^2,$$

$$-\frac{\sin v}{4\sqrt{u^3}}du^2+\frac{\cos v}{2\sqrt{u}}du\,dv-\sqrt{u}\sin v\,dv^2,$$

$$\frac{2}{u^3}du^2\Big)$$

$$\vec{n}=\Big(\frac{\sqrt{u}\cos v}{u^2},\ \frac{\sqrt{u}\sin v}{u^2},\ \frac{1}{2}\Big)$$

Jednačinu asimptotske linije možemo pisati u obliku

$$F_2=0 \Rightarrow d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0=0 \Rightarrow d^2\vec{r}\cdot\vec{n}=0$$

što za ovu jednačinu postaje

$$\Big(-\frac{1}{4u^3}\cos^2 v-\frac{1}{4u^3}\sin^2 v+\frac{1}{u^3}\Big)du^2+\Big(\frac{-1}{2u^2}\sin v\cos u+\frac{1}{2u^2}\sin v\cos u\Big)du\,dv$$

$$+\Big(-\frac{1}{u}\cos^2 v-\frac{1}{u}\sin^2 v\Big)dv^2=0$$

$$\frac{3}{4u^3}du^2-\frac{1}{u}dv^2=0 \quad /\cdot u$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{du^2}{u^2}=dv^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{du}{u}=\pm dv \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\ln u=\pm v+c_1$$

$$\ln u=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}v+c_1$$

$$u=e^{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}v+c_1} \Rightarrow u=ce^{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}v}$$

Asimptotske linije površi su

$$\vec{r}_{1,2}=\Big(\sqrt{ce^{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}v}}\cos v,\ \sqrt{ce^{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}v}}\sin v,\ z=\frac{1}{ce^{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}v}}\Big).$$